

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 19 Απριλίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 38
A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 60
A3. (α) Λάθος (β) Λάθος (γ) Σωστό (δ) Λάθος (ε) Σωστό
A3. 1 (Γ) 2 (Α)

ΘΕΜΑ Β

- B1. Έχουμε $\lambda_{AB} = \frac{0-8}{4-0} = -2$ άρα η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται η πλευρά

AB του τριγώνου OAB έχει εξίσωση $y-0 = -2(x-4) \Leftrightarrow y = -2x+8$

Το μέσο M της πλευράς AB έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ ή $M(2,4)$

- B2. Η μεσοκάθετος ευθείας (ε) της πλευράς AB διέρχεται από το σημείο M και είναι κάθετη στην AB δηλαδή $\lambda_\varepsilon = \frac{1}{2}$ και έχει εξίσωση

$$(ε): y-4 = \frac{1}{2}(x-2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x+3$$

Για $y=0$ έχουμε $0 = \frac{1}{2}x+3 \Leftrightarrow 0 = x+6 \Leftrightarrow x = -6$, άρα η (ε) τέμνει τον άξονα

x'x στο σημείο $\Gamma(-6,0)$

- B3.** Το τετράπλευρο ΓΜΒΔ με $\Gamma(-6,0)$, $M(2,4)$, $B(4,0)$ και $\Delta(x,y)$ εφόσον είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιές του ΓΒ και ΜΔ θα έχουν κοινό μέσο

$$\frac{x_{\Gamma} + x_B}{2} = \frac{x_M + x_{\Delta}}{2} \Leftrightarrow -1 = \frac{2+x}{2} \Leftrightarrow x = -4$$

και

$$\frac{y_{\Gamma} + y_B}{2} = \frac{y_M + y_{\Delta}}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{4+y}{2} \Leftrightarrow y = -4$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\Delta(-4,-4)$

- B4.** Ο κύκλος αφού έχει διάμετρο την ΒΓ τότε το μέσο Κ της ΒΓ θα είναι το κέντρο του κύκλου. Άρα $K\left(\frac{x_{\Gamma} + x_B}{2}, \frac{y_{\Gamma} + y_B}{2}\right)$ ή $K(-1,0)$ και η ακτίνα του κύκλου

$$\text{θα είναι } \rho = \frac{1}{2}(B\Gamma) \Leftrightarrow \rho = 5$$

Άρα ο κύκλος έχει εξίσωση $(x+1)^2 + y^2 = 25$

ΘΕΜΑ Γ

- Γ1. (α)** Για την εξίσωση $C_2 : x^2 + y^2 - 8x - 6y + \alpha = 0$ έχουμε :

$$A = -8, B = -6 \text{ και } \Gamma = \alpha$$

Για να παριστάνει κύκλο πρέπει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow (-8)^2 + (-6)^2 - 4\alpha > 0$

$$\Leftrightarrow 64 + 36 - 4\alpha > 0 \Leftrightarrow 100 - 4\alpha > 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha < 25}$$

(β) Το κέντρο του κύκλου έχει συντεταγμένες $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ ή $K(4,3)$ και η

$$\text{ακτίνα του είναι } R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{100 - 4\alpha}}{2} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{4(25 - \alpha)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{2\sqrt{25 - \alpha}}{2} \Leftrightarrow R = \sqrt{25 - \alpha}$$

- Γ2.** Ο κύκλος C_1 με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$ έχει εξίσωση $C_1: x^2 + y^2 = 4$ ενώ ο κύκλος C_2 με κέντρο $K(4,3)$ και ακτίνα $R = \sqrt{25-\alpha}$ έχει εξίσωση $C_2: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25-\alpha$

Για να εφάπτονται οι κύκλοι εξωτερικά θα πρέπει η απόσταση που έχουν τα κέντρα τους να είναι ίση με το άθροισμα των ακτινών τους.

$$(OK_1) = R + \rho \Leftrightarrow 5 = 2 + \sqrt{25-\alpha} \Leftrightarrow 3 = \sqrt{25-\alpha} \Leftrightarrow 9 = 25-\alpha \Leftrightarrow \alpha = 16$$

- Γ3.** Για $\alpha = 16$ έχουμε $C_2: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$ ενώ $C_1: x^2 + y^2 = 4$

Η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από τα κέντρα $O(0,0)$, $K(4,3)$ των κύκλων

$$C_1, C_2 \text{ αντίστοιχα είναι } y = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow 4y - 3x = 0, \text{ αφού } \lambda_{OK_1} = \frac{3-0}{4-0} = \frac{3}{4} \text{ και η}$$

ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων που είναι το κέντρο του ενός κύκλου.

Η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων είναι κάθετη στην κοινή τους εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.

Η εξίσωση της κοινή τους εφαπτομένη είναι της μορφής

$$(\varepsilon): 3y + 4x + \kappa = 0, \kappa \in \mathbb{R}$$

Για να εφάπτεται και στους δύο κύκλους θα πρέπει το παρακάτω σύστημα να έχει κοινή λύση

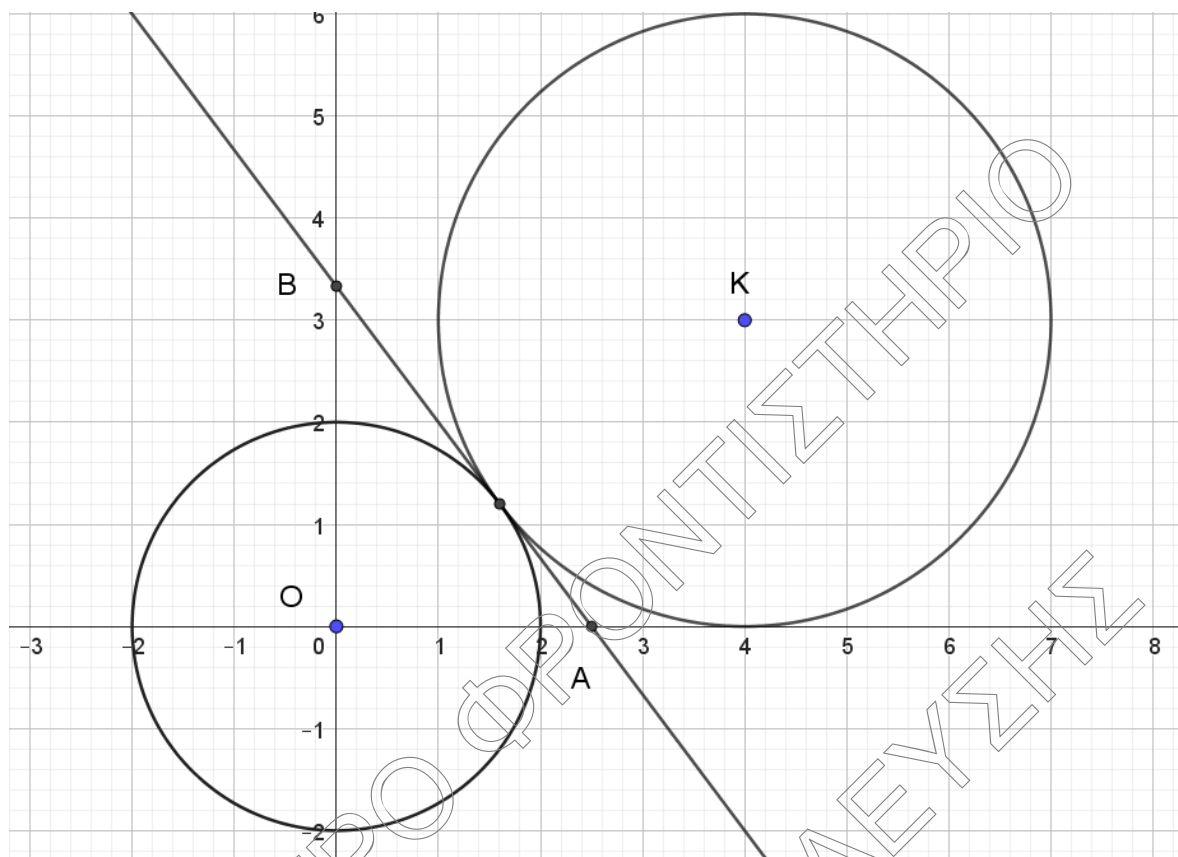
$$d(O, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\kappa|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2 \Leftrightarrow |\kappa| = 10 \Leftrightarrow \kappa = 10 \text{ ή } \boxed{\kappa = -10}$$

και

$$d(K, \varepsilon) = R \Leftrightarrow \frac{|25 + \kappa|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3 \Leftrightarrow |25 + \kappa| = 15 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = -10} \text{ ή } \kappa = -40$$

Κοινή λύση $\kappa = -10$ άρα η κοινή τους εφαπτομένη είναι η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): 3y + 4x - 10 = 0$

Γ4. (α)



(β) Το ζητούμενο εμβαδόν θα προκύψει αν από το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου με ακτίνα $\rho = 2$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της ευθείας $(\varepsilon): 3y + 4x - 10 = 0$ με τους άξονες

Για $y = 0$ έχουμε $x = \frac{5}{2}$ άρα $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

Για $x = 0$ έχουμε $y = \frac{10}{3}$ άρα $B\left(0, \frac{10}{3}\right)$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $E_{\text{ΟΑΒ}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{10}{3} = \frac{25}{6} \tau.μ$

Το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου είναι $E = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi \tau.μ$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\left(\frac{25}{6} - \pi\right) \tau.μ$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ έχουμε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\kappa - 3, |\vec{\alpha}| = \sqrt{\kappa^2 - 6\kappa + 13}, |\vec{\beta}| = \sqrt{10} \text{ ενώ ισχύει } \cos(135^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\kappa - 3}{\sqrt{\kappa^2 - 6\kappa + 13} \cdot \sqrt{10}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\kappa + 3}{\sqrt{\kappa^2 - 6\kappa + 13} \cdot \sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow 2(\kappa + 3) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} \sqrt{\kappa^2 - 6\kappa + 13} \Leftrightarrow 4(\kappa + 3)^2 = 2 \cdot 10 \cdot (\kappa^2 - 6\kappa + 13)$$

$$\Leftrightarrow (\kappa + 3)^2 = 5 \cdot (\kappa^2 - 6\kappa + 13) \Leftrightarrow \kappa^2 + 6\kappa + 9 = 5\kappa^2 - 30\kappa + 65 \Leftrightarrow 4\kappa^2 - 36\kappa + 56 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\kappa^2 - 36\kappa + 56 = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 9\kappa + 14 = 0$$

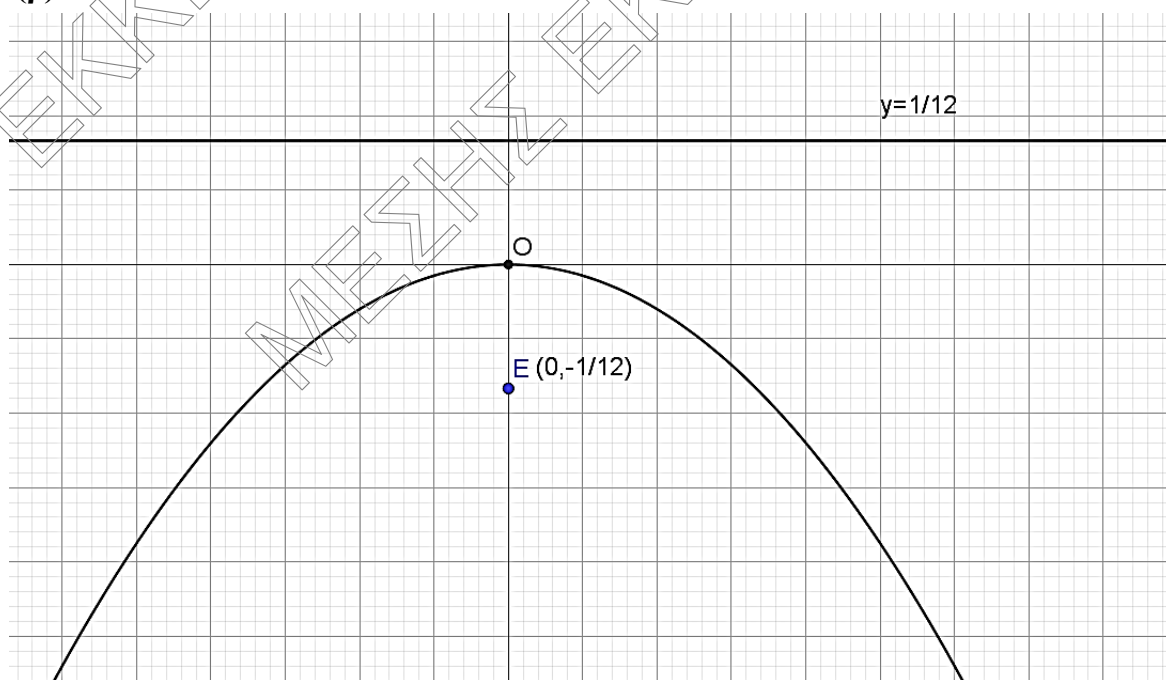
Η τελευταία εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς 2 και 7, όμως $1 < \kappa < 7$ άρα δεκτή $\kappa = 2$

Δ2. (α) Για $\kappa = 2$ η παραβολή έχει εξίσωση $C_1: y = -3x^2 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{3}y$

$$2p = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow p = -\frac{1}{6}, \text{ Η εστία έχει συντεταγμένες } E\left(0, \frac{p}{2}\right) \text{ δηλαδή } E\left(0, -\frac{1}{12}\right)$$

$$\text{ενώ η διευθετούσα έχει εξίσωση } (\delta): y = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{12}$$

(β)



Δ3. Αν είναι $\overline{AB} = \vec{\beta}$ με A, B σημεία της παραβολής, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B .

Έστω $A(x_1, -3x_1^2)$ και $B(x_2, -3x_2^2)$ τα σημεία της παραβολής

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, -3x_2^2 + 3x_1^2), \text{ εφόσον } \overline{AB} = (-1, 3)$$

Θα ισχύει

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = -1 \\ -3x_2^2 + 3x_1^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 - 1 \\ -(x_1 - 1)^2 + x_1^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 - 1 \\ -3(x_1 - 1)^2 + 3x_1^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Άρα τα σημεία είναι $A(1, -3)$ και $B(0, 0)$

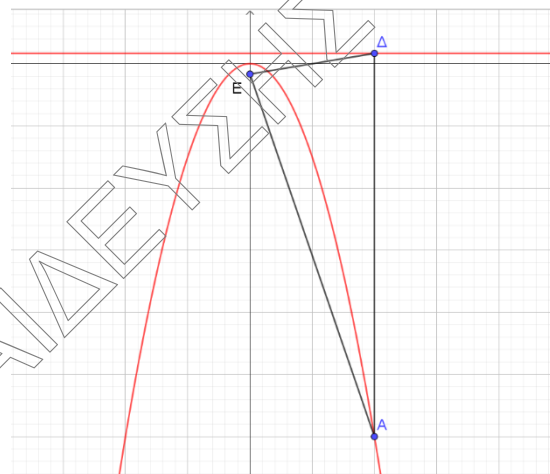
Δ4. Το σημείο Δ είναι η προβολή του σημείου

$A(1, -3)$ στη διευθετούσα $(\delta) y = \frac{1}{12}$ άρα θα έχει

συντεταγμένες $\Delta\left(1, \frac{1}{12}\right)$

Θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ με $\Delta\left(1, \frac{1}{12}\right)$,

$A(1, -3)$ και $E\left(0, -\frac{1}{12}\right)$ είναι ισοσκελές.



$$(A\Delta) = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{1}{12} + 3\right)^2} = \frac{37}{12} \quad (AE) = \sqrt{(1-0)^2 + \left(-\frac{1}{12} + 3\right)^2} = \frac{37}{12}$$

Άρα το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.